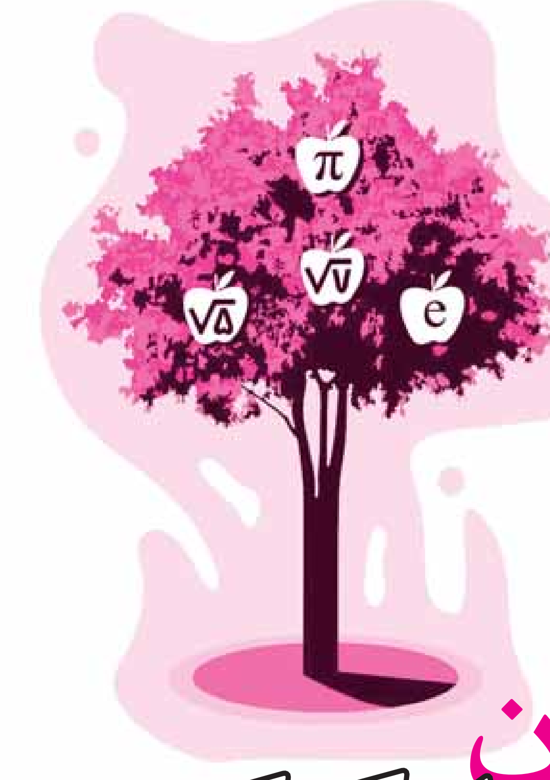


گشتی در سرزمین اعداد گنگ

محمود داورزنی
پژوهش‌سرای دانش‌آموزی ذکریای رازی، ناحیهٔ ۱ شهرری
نصیر فلاح
دانش‌آموز سال سوم ریاضی دبیرستان شهید بهشتی، ناحیهٔ ۱ شهرری

اشاره

اعداد حقیقی به دو دستهٔ گویا و گنگ تقسیم می‌شوند. مثلاً $\frac{۲}{۵}$ گویا و $\sqrt{۵}$ گنگ است. در این تقسیم‌بندی اثبات گنگ بودن بسته به نوع مسئله تغییر می‌کند. برای مثال، روشی که به منظور اثبات گنگ بودن $\sqrt[۳]{۵}$ به‌کار می‌رود با روشی که برای اثبات گنگ بودن $۲\sqrt{۳}-\sqrt{۵}$ به‌کار می‌رود، متفاوت است. در این مقاله، ابتدا اعداد حقیقی را به دو بخش اعداد جبری و غیرجبری (متعالی) تقسیم می‌کنیم. سپس رابطهٔ بین این اعداد را با اعداد گویا و گنگ بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان گنگ بودن بسیاری از اعداد حقیقی جبری را به روش واحدی بیان کرد.

۱. اعداد گویا و گنگ

هر عدد حقیقی به شکل $\frac{a}{b}$ که $a,b\in Z$ و $b\neq ۰$ گویا و بقیهٔ اعداد حقیقی، گنگ نامیده می‌شوند. مثلاً $\sqrt{۲}$، $۵\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$، $\log ۲$ ، $\sin ۱۰$ ، π و $۲^{\sqrt{۲}}$ گنگ هستند، ولی روش اثبات گنگ بودن این اعداد یکسان نیست و برای بعضی از آن‌ها مثل π و یا $۲^{\sqrt{۲}}$، باید از ابزارهای پیشرفته‌ای استفاده کرد تا بتوان نشان داد این اعداد گنگ هستند. در ادامه چند خاصیت سادهٔ اعداد گویا و گنگ را مرور می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. اگر α یک عدد گنگ و r یک عدد گویای مخالف صفر باشد، $r+\alpha$، $r\alpha$ و $\frac{r}{\alpha}$ گنگ هستند.

اثبات: به کمک برهان خلف به‌راحتی همهٔ آن‌ها اثبات می‌شوند. برای مثال، اگر $r=\frac{a}{b}$ که $a,b\in Z$ و $b\neq ۰$ و $r\alpha$ گنگ نباشد، پس گویاست یعنی $r\alpha=r'\in Q$ و در نتیجه $\alpha=\frac{r'}{r}\in Q$ که متناقض با فرض گنگ بودن α است. پس $r\alpha$ گنگ است.

نتیجهٔ ۱. اگر α یک عدد گنگ باشد، $-\alpha$ و $\alpha^{-۱}$ نیز گنگ هستند.

اثبات: در قضیهٔ بالا و در $r\alpha$ و $\frac{r}{\alpha}$ به ترتیب قرار می‌دهیم: $r=-۱$ و $r=۱$.

البته مجموعهٔ اعداد گنگ نسبت به عمل جمع بسته نیست. مثلاً داریم: $۰=(\sqrt{-۲})+\sqrt{۲}$ که صفر یک عدد گنگ نیست. به کمک قضیهٔ بالا گنگ بودن بسیاری از اعداد ثابت می‌شود؛ برای مثال، $\sqrt{۲}-۳$ و یا $\frac{۵}{۲}\sqrt{۳}$؛ البته به شرطی که ثابت شود $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ گنگ هستند.

در ادامه با حل چند مثال، گنگ بودن اعدادی مانند $\sqrt{3}$ و $3\sqrt{2}-2\sqrt{5}$ را نشان می‌دهیم.

◆**مثال ۱.** ثابت کنید که $\sqrt{3}$ گنگ است.

اثبات: از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\sqrt{3}$ گنگ نباشد. پس:

$$\sqrt{3}=\frac{a}{b}: a,b\in Z, b\neq 0$$

می‌توانیم فرض کنیم کسر $\frac{a}{b}$ تحویل‌ناپذیر است، یعنی تا جایی ساده شده که دیگر a و b به‌هیچ عدد طبیعی دیگری ساده نمی‌شوند. در این حالت می‌گوییم a و b نسبت به هم اول‌اند؛ یعنی $(a,b)=1$. از رابطهٔ $\frac{a}{b}=\sqrt{3}$ می‌توان تساوی $a^2=3b^2$ را نتیجه گرفت. بنابراین a^2 مضرب ۳ است و در نتیجه a نیز مضرب ۳ است، پس: $a=3k$ که $k\in Z$. با جای‌گذاری این مقدار در رابطهٔ $a^2=3b^2$، $9k^2=3b^2$ و یا $b^2=3k^2$ نتیجه می‌شود. بنابراین مشابه قبل باید b^2 مضرب ۳ باشد و در نتیجه b نیز مضرب ۳ خواهد بود؛ یعنی $b=3k'$ که $k'\in Z$. با توجه به نتایج بالا a و b هر دو مضرب ۳ هستند و این به معنای آن است که کسر $\frac{a}{b}$ حداقل به ۳ ساده می‌شود که خلاف فرض است. پس $\sqrt{3}$ گنگ است.

◆**مثال ۲.** اگر $\sqrt{2}$ و $\sqrt{5}$ گنگ باشند، ثابت کنید $3\sqrt{2}-2\sqrt{5}$ نیز گنگ است.

اثبات: باز هم از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $3\sqrt{2}-2\sqrt{5}$ گنگ نباشد. پس گویاست. با توجه به اینکه:

$$(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})=20-18=2$$

پس: $2\sqrt{5}+3\sqrt{2}=\frac{2}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ و در نتیجه $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$ نیز گویاست. از طرف دیگر:

$$(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})+(2\sqrt{5}+3\sqrt{2})=4\sqrt{5}$$

و چون جمع دو عدد گویا نیز عددی گویاست، پس $4\sqrt{5}$ و در نتیجه $\sqrt{5}$ نیز گویاست که متناقض با فرض است. بنابراین $3\sqrt{2}-2\sqrt{5}$ گنگ است.

در مثال زیر نیز گنگ بودن $3\sqrt{2}-2\sqrt{5}$ خواسته شده، ولی فرض سؤال متفاوت است و این راه‌حل متفاوتی را ایجاب می‌کند.

◆**مثال ۳.** اگر $\sqrt{10}$ گنگ باشد، ثابت کنید $2\sqrt{5}-3\sqrt{2}$ نیز یک عدد گنگ است.

اثبات: فرض کنیم $2\sqrt{5}-3\sqrt{2}$ گنگ نباشد، پس: $2\sqrt{5}-3\sqrt{2}=r$ که $r\in Q$، داریم:

$$2\sqrt{5}-3\sqrt{2}=r\Rightarrow(2\sqrt{5}-3\sqrt{2})^2=r^2$$

$$\Rightarrow 20+18-12\sqrt{10}=r^2\Rightarrow\sqrt{10}=\frac{38-r^2}{12}$$

و چون $r\in Q$، پس: $\frac{38-r^2}{12}$ و در نتیجه $\sqrt{10}$ نیز گویاست که متناقض با فرض است.

از سه مثال بالا به‌راحتی می‌توان دریافت که روش‌های اثبات گنگ بودن اعداد رادیکالی متفاوت با یکدیگرند.

۲. معادلات جبری و ریشه‌های گویای آن‌ها

هر عدد رادیکالی را می‌توانیم ریشهٔ یک معادلهٔ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح در نظر بگیریم. مثلاً $x=\sqrt{2}$ یک ریشه از معادلهٔ $x^2-2=0$ است و یا برای $x=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$. به‌راحتی می‌توانیم معادله‌ای بسازیم:

$$x=2\sqrt{3}-\sqrt{2}\Rightarrow x^2=12+2-4\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow(x^2-14)^2=(-4\sqrt{6})^2\Rightarrow x^4-28x^2+196=96$$

$$\Rightarrow x^4-28x^2+100=0$$

همان‌طور که در بالا مشاهده می‌شود، $\sqrt{2}$ ریشهٔ معادلهٔ $x^2-2=0$ و $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$ نیز ریشه‌ای از معادلهٔ $x^4-28x^2+100=0$ است. به چنین اعدادی که ریشهٔ یک معادله با ضرایب صحیح هستند، جبری می‌گوییم و به اعداد حقیقی دیگر غیرجبری می‌گوییم. مثلاً log۲ غیرجبری است که اثبات آن نیز کار نسبتاً دشواری است. اگر بتوانیم ثابت کنیم که این معادلات ریشهٔ گویایی ندارند، بنابراین اعداد $\sqrt{2}$ و $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$ گویا نیستند و باید گنگ باشند. برای اثبات این مطلب ذکر مفاهیم زیر لازم است.

لم اقلیدس: اگر a، b و c اعداد صحیحی باشند و $a|bc$ و $(a,b)=1$، آنگاه: $a|c$.

اثبات این قضیه در کتاب درسی «ریاضیات گسسته» آمده است. بیان دیگری از این قضیه به این صورت است که اگر a یک مقسوم‌علیه bc باشد و a و b

هیچ مقسوم‌علیه مشترکی به‌جز ۱ نداشته باشند، a یک مقسوم‌علیه c است. قضیهٔ زیر اساس مطالب بعدی است.

قضیهٔ ۲. اگر $c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + ... + c_1 x + c_0 = 0$ یـک معادله بـا ضرایب صحیـح و $\frac{a}{b}$ ریشـهٔ گویای تحویل‌ناپذیر این معادله باشـد، a یک مقسوم‌علیه c_0 و b یک مقسوم‌علیه c_n خواهد بود.

اثبات: اگر $x = \frac{a}{b}$، ریشـهٔ این معادله و همچنین یک کسر تحویل‌ناپذیر باشـد، در این معادله صدق می‌کند. بنابراین:

$$c_n (\frac{a}{b})^n + c_{n-1}(\frac{a}{b})^{n-1} + ... + c_1(\frac{a}{b}) + c_0 = 0$$

با ضرب طرفین در b^n داریم:

$$c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1}b + ... + c_1 ab^{n-1} + c_0 b^n = 0$$

بنابراین:

$$c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1}b + ... + c_1 ab^{n-1} = -c_0 b^n$$

در معادلهٔ بالا a یک مقسوم‌علیه سمت چپ تساوی است، بنابراین a یک مقسـوم‌علیه سمت راست، یعنی $-c_0 b^n$ نیز هسـت و چون: $(a,b)=1$، طبق لم اقلیدس a یک مقسوم‌علیه c_0 است. به‌طور مشابه داریم:

$$c_{n-1}a^{n-1}b + ... + c_1 ab^{n-1} + c_0 b^n = -c_n a^n$$

در این معادله b یک مقسوم‌علیه سمت چپ است، پس یک مقسوم‌علیه سمت راست، یعنی $-c_n a^n$ نیز هست و چون: $(a,b)=1$، طبق لم اقلیدس b یک مقسـوم‌علیه c_n خواهد بود.

◆**مثال ۴.** تمام ریشه‌های گویای معادلهٔ زیر را پیدا کنید.

$2x^3 - 9x^2 + 10x - 3 = 0$

حل: اگر $x = \frac{a}{b}$، ریشهٔ گویا و تـحویل‌ناپذیر این معادله باشـد، طبق قضیهٔ بالا a یک مقسـوم‌علیه ۳- و b یک مقسـوم‌علیه ۲ است. بنابراین انتخاب‌های ممکن a و b عبارت‌اند از:

$a = \pm 1, \pm 3, b = \pm 1, \pm 2$

پس حالت‌های مختلف $\frac{a}{b}$ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{a}{b} = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}$$

که با جای‌گذاری در معادله، فقط عددهای ۱، $\frac{1}{2}$ و ۳ در آن صدق می‌کند و بنابراین ریشه‌های آن به‌شمار می‌روند.

نکتـــه: در قضیهٔ بالا، اگـــر $c_n=1$ و این معادله یک ریشه گویا داشته باشد، این ریشه یک عدد صحیح و این عدد یک مقسوم‌علیه c_0 است. به کمک قضیهٔ بالا گنگ بودن چند عدد را نشان می‌دهیم.

◆**مثال ۵.** ثابت کنید $\sqrt{3}$ گنگ است.

حل: عدد $\sqrt{3}$ ریشـهٔ معادله $x^2 - 3 = 0$ است. اگر ثابت کنیم که این معادله ریشهٔ گویا ندارد، $\sqrt{3}$ گنگ خواهد بود. با توجه به نکتهٔ بالا هر ریشهٔ گویای این معادله یک عدد صحیح و این عدد صحیح یک مقسوم‌علیه ۳- است. بنابراین اگر معادلهٔ بالا ریشه‌های گویا داشته باشد، این ریشه‌ها در بین عددهای زیرند:

$\pm 1, \pm 3$

با جای‌گذاری به‌سادگی درمی‌یابیم که هیچ‌کدام از این عددها ریشـهٔ معادله نیستند. پس این معادله هیچ ریشـهٔ گویایی ندارد و چون $\sqrt{3}$ ریشهٔ این معادله است، قطعاً گنگ خواهد بود.

◆**مثال ۶.** ثابت کنید $\sqrt[3]{7}$ گنگ است.

حل: عدد $\sqrt[3]{7}$ ریشـهٔ معادله $x^3 - 7 = 0$ است و می‌دانیم هر ریشهٔ گویای این معادله یک عدد صحیح و این عدد صحیح یک مقسـوم‌علیه ۷- اسـت. بنابراین ریشه‌های گویای این معادله فقط از بین اعداد زیر می‌توانند باشند:

$\pm 1, \pm 7$

که با جای‌گذاری آن‌ها در معادلهٔ بالا هیچ‌کدام ریشه نیسـتند. پس $\sqrt[3]{7}$ که ریشـهٔ این معادله است، گنگ خواهد بود.

◆**مثال ۷.** ثابت کنید $\sqrt[3]{2} - \sqrt{5}$ گنگ است.

ابتدا معادله‌ای با ضرایب صحیح به‌دست می‌آوریم که این عدد ریشهٔ آن باشد:

$$x = \sqrt[3]{2} - \sqrt{5} \Rightarrow x + \sqrt{5} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow (x + \sqrt{5})^3 = 2$$
$$\Rightarrow x^3 + 3\sqrt{5}x^2 + 15x + 5\sqrt{5} = 8$$
$$\Rightarrow x^3 + 15x - 8 = -\sqrt{5}(3x^2 + 5)$$
$$\Rightarrow (x^3 + 15x - 8)^2 = 5(9x^4 + 30x^2 + 25)$$
$$\Rightarrow x^6 - 15x^4 - 16x^3 - 75x^2 - 240x - 61 = 0$$

با توجه به اینکه هر ریشهٔ گویای این معادله یک عدد صحیح، و این عدد صحیح یک مقســومعلیه ۶۱- و ۶۱ نیز یک عدد اول است، ریشه‌های گویا (در صورت وجود) در میان اعداد زیر خواهند بود:

$\pm 1, \pm 61$

با جای‌گذاری معلوم می‌شود، هیچ‌کدام ریشهٔ معادله نیستند. پس این معادله ریشــهٔ گویا ندارد و با توجه به اینکه $\sqrt{5}-\sqrt[3]{2}$ ریشــهٔ این معادله است، پس این عدد گنگ خواهد بود.

◆**مثال ۸.** ثابت کنید $\sin 10^\circ$ گنگ است.

با توجه به اتحاد مثلثاتی

$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

و با قرار دادن $\theta=10$، داریم:

$$3\sin 10-4\sin^3 10=\frac{1}{2}3x\quad 4x$$

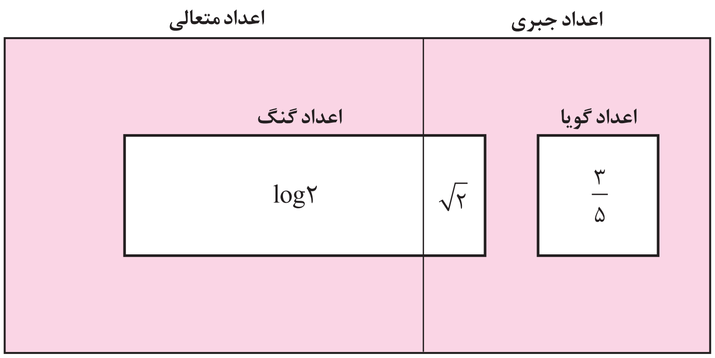
و با جای‌گذاری $\sin 10=x$، معادلهٔ $3x-4x^3=\frac{1}{2}$ و یا $-8x^3+6x-1=0$ به‌دســت می‌آید که $\sin 10$ ریشــهٔ آن اســت. اکنون اگر معادلهٔ اخیر ریشــهٔ گویای $\frac{a}{b}$ داشته باشد، باید a مقســومعلیه ۱- و b مقسوم‌علیه ۸- باشد. پس ریشــه‌های گویای این معادله به شکل زیر خواهند بود:

$$\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}$$

که با جای‌گــذاری در معادله هیچ‌کدام ریشــهٔ آن نیســتند. پس این معادله ریشــهٔ گویا ندارد و در نتیجه $\sin 10$ (که ریشهٔ این معادله است) گویا نیست.

۳. اعداد جبری و غیرجبری

همان‌طــور که قبلاً گفته شــد، هر عدد حقیقی که ریشــهٔ معادله‌ای با ضرایب صحیح باشد، جبری نامیده می‌شــود و در غیر این صورت آن‌را غیرجبری یا متعالی می‌نامیم. هر عدد گویا یک عدد جبری است، چرا که اگر $x=\frac{a}{b}$ یک عدد گویا باشد، $bx-a=0$ معادله‌ای با ضرایب صحیح است که $\frac{a}{b}$ ریشــه‌ای از آن است. بنابراین اعداد گویا زیرمجموعهٔ سره‌ای از اعداد جبری هستند. از سوی دیگر، هر عدد گنگی لزوماً یک عدد متعالی نیست. مثلاً $\sqrt{2}$ گنگ است، ولی متعالی نیست، در حالی‌که $\log 2$ هم گنگ است و هم متعالی. در حقیقت بسیاری از اعداد حقیقی گنگ، متعالی هستند. از توضیحات بالا می‌توانیم تصویر زیر را از اعداد حقیقی در ذهن داشته باشیم:



از جملــه عددهای متعالی $\log 2$ و π هســتند. در حالت کلی می‌توان ثابت کــرد که $\log n$ برای هر n که مخالف $10^k\,(k\in Z)$ باشــد، غیرجبری است، ولی اثبات متعالی بودن آن‌ها مفصل‌تر و عمیق‌تر از آن اســت که بتوان در اینجا بیان کرد.

اثبات متعالی بودن π در ســال ۱۸۸۲ کشف شد، ولی اثبات متعالی بــودن اعدادی مانند $\log 2$ و یا $2^{\sqrt{2}}$ سال‌ها بعد و در سال ۱۹۳۴ انجام شد. در سال ۱۹۰۰، ریاضی‌دان بزرگ، **دیوید هیلبرت**، فهرست مشهوری از ۲۳ مســئلهٔ متفاوت را عرضه کرد که هر کدام از آن‌ها سؤال‌های ریاضی حل نشدهٔ مهمی بودند که تا آن زمان حل نشده بودند. مسئلهٔ هفتم به این صورت بود: «اگر α و β جبری باشــند، آیا α^β جبری است و یا غیرجبری؟» البته حالت‌های $\alpha=0$ و $\alpha=1$ و یا وقتی که β گویا باشد، از این حکم مستثنا شده‌اند. در سال ۱۹۳۴ متعالی بودن این عدد توسط **گلفند**[1] و به‌طور جداگانه توسط **شنیدر**[2] اثبات شد. متعالی‌بودن $2^{\sqrt{2}}$ حالت خاصی از این حکم است. همچنین با کمک این قضیه متعالی بودن $\log 2$ نیز به‌راحتی اثبات می‌شود، چرا که:

$$\alpha^\beta=10^{\log 2}=2$$

در حالت کلی این قضیه ثابت می‌کند که اگر r گویا و $\log r$ گنگ باشد، $\log r$ متعالی خواهد بود.

پی‌نوشت‌ها

1. Gelfond
2. Schncider

منابع

1. Ian Anderson, *A first course in discrete mathematics*, Springer Verlag, 2001.
2. J. H. van Lint and R. M. Wilson, *A course in combinatorics*. Cambridge University Press. 1992.